

- 解答例に関して: 院試の問題について受験生同士で議論できればなあ, と作りました. 解答例が正答であることは保証しません. 間違えてたり, もっといい方法があれば指摘して欲しいと思います.

a – **3** (電磁気学) 解答例 2009.07.13

- (i) なぜその位置にその大きさの点電荷を置くのか, という理由ならば, 導体球表面が等電位にならなければならないなどといった条件を使って説明できる.

なぜ点電荷 1 つを置くだけで導体球表面の電荷分布の代わりになるのか, という理由はよくわからない. うまく説明できる人は教えてほしい.

- (ii) 線分 TR の長さ r_T は

$$r_T = \sqrt{\left(x - \frac{a^2}{d_0}\right)^2 + y^2} = \sqrt{r^2 + \frac{a^4}{d_0^2} - 2r\frac{a^2}{d_0}\cos\theta}, \quad (1)$$

線分 PR の長さ r_P は

$$r_P = \sqrt{(x - d_0)^2 + y^2} = \sqrt{r^2 + d_0^2 - 2rd_0\cos\theta} \quad (2)$$

である.

点 R における電位 $V(r, \theta)$ は

$$\begin{aligned} V(r, \theta) &= \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 r_T} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_P} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ -\frac{a}{r_T} + \frac{1}{r_P} \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{ただし } r_T' = \sqrt{r^2 d_0^2 + a^4 - 2ra^2 d_0 \cos\theta}, \quad (4)$$

$$r_P = \sqrt{r^2 + d_0^2 - 2rd_0 \cos\theta}. \quad (5)$$

- (iii) 導体球表面の電荷の面密度を求めるために, 導体球表面近傍における電界の大きさを求める. 導体球表面近傍の電界は導体球表面と直交しているので, $V(r, \theta)$ を r 方向に偏微分したものを -1 倍し, $r = a$ と代入することで導体球表面近傍の電界を求めることができる.

$$\frac{\partial}{\partial r} V(r, \theta) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ ad_0(d_0 r - a^2 \cos\theta)r_T'^{-3} - (r - d_0 \cos\theta)r_P^{-3} \right\} \quad (6)$$

より, 導体球表面近傍の電界は r 方向を正に取り

$$E_a = -\frac{\partial}{\partial r} V(r, \theta) \Big|_{r=a} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(d_0^2/a)(1 - \cos\theta) - a + d_0 \cos\theta}{(d_0^2 - 2d_0 a \cos\theta + a^2)^{3/2}} \right\}. \quad (7)$$

導体球表面の電荷の面密度 $\sigma(\theta)$ は, E_a とガウスの法則より

$$\sigma(\theta) = \epsilon_0 E_a(\theta) \quad (8)$$

$$= -\frac{Q}{4\pi} \left\{ \frac{(d_0^2/a)(1 - \cos\theta) - a + d_0 \cos\theta}{(d_0^2 - 2d_0 a \cos\theta + a^2)^{3/2}} \right\}. \quad (9)$$

- (iv) ガウスの法則を導体球全体に適用することを考える. 実際に導体球表面に電荷が分布している場合でも, 位置 T に影像電荷をおいて考えた場合でも, 導体球表面に出入りする電気力線は同じであるはずである. つまり, ガウスの法則より, その内部にある電荷総量は等しい.

導体球表面に分布している電荷の総和は

$$Q' = -Q \frac{a}{d_0}. \quad (10)$$

(v) 設問 (i) の状態からスイッチ S を開くことを考える. 導体球の設置がなくなるため, 導体球の電位が 0V であるという条件はなくなる. 逆に, 導体球内部の電荷の総和は保存される.

しかし, スイッチ S を開く前の状態のまま, スイッチ S を開いた後の条件を満たすため, スイッチ S を開いただけでは電荷の移動などは起こらない. よって, 影像電荷の配置も (i) と同様に配置すればよい.

(vi) 影像電荷を置いて考える. まず, 導体球表面が全て等電位になるように, OP 上の, O からの距離が $l' = 3a^2/d_0$ だけ離れた位置 T' に電荷 $Q'' = -3Qa/d_0$ を置く. さらに, 導体球内の電荷の総和が設問 (v) の時と同じでなければならないので, 位置 O に電荷 $Q''' = 2Qa/d_0$ を置く.

これら 3 つの点電荷による位置 R での電位 $V'(r, \theta)$ は

$$V'(r, \theta) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ -\frac{3a}{\sqrt{d_0^2 r^2 + 9a^4 - 6d_0 a^2 r \cos \theta}} + \frac{3}{\sqrt{9r^2 + d_0^2 - 6d_0 r \cos \theta}} + \frac{2a}{d_0 r} \right\}. \quad (11)$$

修正箇所

- July 12, 2009 : 初版
- July 13, 2009 :
問題 (iii) で, 電界の向きがおかしかったのでちゃんと考えました. 指摘ありがとうございます.