- **解答例に関して**: 院試の問題について受験生同士で議論できればなぁ, と作りました. 解答例が正答であることは保証しません. 間違えてたり, もっといい方法があれば指摘して欲しいと思います.

a − 6 (電子回路) 解答例 2009.07.21

(i) 電圧利得って振幅の比 $|V_\mathrm{o}|/|V_\mathrm{i}|$ (位相は関係ない) だと個人的には思うわけだが, 設問では $V_\mathrm{o}/V_\mathrm{i}$ を電圧利得と呼ぶといっているので, 位相を含めて考える.

問題の図 1 の V_o は

$$V_\mathrm{o} = \frac{R}{R + \mathrm{j}\omega L} V_\mathrm{i} \tag{1}$$

なので, 図 1 の回路の電圧利得 G_1 は

$$G_1 = \frac{V_\mathrm{o}}{V_\mathrm{i}} = \frac{R}{R + \mathrm{j}\omega L} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega L/R}. \tag{2}$$

同様に問題の図 2 の V_o は

$$V_\mathrm{o} = \frac{1/\mathrm{j}\omega C}{R + 1/\mathrm{j}\omega C} V_\mathrm{i} \tag{3}$$

なので, 図 2 の回路の電圧利得 G_2 は

$$G_2 = \frac{V_\mathrm{o}}{V_\mathrm{i}} = \frac{1/\mathrm{j}\omega C}{R + 1/\mathrm{j}\omega C} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega RC}. \tag{4}$$

G_1 と G_2 が等しくなるための条件は, 明らかに

$$\frac{L}{R} = RC \Leftrightarrow L = R^2 C. \tag{5}$$

(ii) 問題の図 3 の回路の電圧利得 G_3 は

$$G_3 = \frac{Z_\mathrm{X}}{Z_\mathrm{X} + 1/\mathrm{j}\omega C} \tag{6}$$

$$= \frac{1}{1 - \mathrm{j}/\omega C Z_\mathrm{X}} \tag{7}$$

である.

これが G_2 と等しくなるための $Z_\mathrm{X}(\omega)$ の条件は

$$-\frac{1}{\omega C Z_\mathrm{X}(\omega)} = \omega RC \tag{8}$$

$$\Rightarrow Z_\mathrm{X}(\omega) = -\frac{1}{\omega^2 C^2 R}. \tag{9}$$

つまり, $Z_\mathrm{X}(\omega)$ は, その大きさが ω の 2 乗に反比例し, 電圧と電流の位相を π ずらすような関数でなければならない.

(iii) インピーダンス Z_i に流れる電流 (下向き) を I_i, Z_i の上端の電位を V_i とする. ただし $i = 1, ..., 5$ である.

まず $V_1 = V$ は自明であり, さらにオペアンプの仮想短絡により $V_3 = V_5 = V$ がわかる. また, $I_5 = V_5/Z_5 = V/Z_5$ である. ここからはオペアンプの入力インピーダンスが無限大, つまりオペアンプの入力端

子には電流が流れないという条件を使い, オームの法則より

$$I_4 = I_5, \tag{10}$$

$$V_4 = V_5 + Z_4 I_4 = V + \frac{Z_4}{Z_5} V = \left(1 + \frac{Z_4}{Z_5}\right) V, \tag{11}$$

$$I_3 = \frac{V_3 - V_4}{Z_3} = -\frac{Z_4}{Z_3 Z_5} V, \tag{12}$$

$$I_2 = I_3, \tag{13}$$

$$V_2 = V_3 + Z_2 I_2 = V - \frac{Z_2 Z_4}{Z_3 Z_5} V = \left(1 - \frac{Z_2 Z_4}{Z_3 Z_5}\right) V, \tag{14}$$

$$I_1 = I = \frac{V_1 - V_2}{Z_1} = \frac{Z_2 Z_4}{Z_1 Z_3 Z_5} V \tag{15}$$

といった式が得られる.

Z_i がすべて同一の抵抗 R の場合の V_2 と V_4 は

$$V_2 = \left(1 - \frac{Z_2 Z_4}{Z_3 Z_5}\right) V = 0, \tag{16}$$

$$V_4 = \left(1 + \frac{Z_4}{Z_5}\right) V = 2V \tag{17}$$

である.

(iv) 式 15 より,

$$I = \frac{Z_2 Z_4}{Z_1 Z_3 Z_5} V \tag{18}$$

$$\Rightarrow Z = \frac{V}{I} = \frac{Z_1 Z_3 Z_5}{Z_2 Z_4} \tag{19}$$

と求まる.

(v) Z_i を

$$Z_1 = Z_3 = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}, \tag{20}$$

$$Z_2 = Z_4 = Z_5 = R \tag{21}$$

とすると,

$$Z = \frac{Z_1 Z_3 Z_5}{Z_2 Z_4} = -\frac{1}{\omega^2 C^2 R} \tag{22}$$

となり, 設問 (ii) で求めたものと一致する.

(vi) $R + Z_\mathrm{X}(\omega) = 0$ となる ω を ω_0 とする.

$$R + Z_\mathrm{X}(\omega 1_0) = R - \frac{1}{{\omega_0}^2 C^2 R} = 0 \tag{23}$$

$$\Rightarrow {\omega_0}^2 = \frac{1}{(CR)^2} \tag{24}$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \pm\frac{1}{CR} \tag{25}$$

で, $\omega_0 \geq 0$ より

$$\omega_0 = \frac{1}{CR} \tag{26}$$

と求まる. これが共振角周波数である.

(vii) 共振時 $\omega = \omega_0$ において $Z_\mathrm{X} = -R$ である. よって, 電流 I が流れたときの消費電力 P は,

$$P = Z_\mathrm{X} I^2 = -RI^2. \tag{27}$$

符号がマイナスになっていることから, 素子 Z_X から電力が供給されているということがわかる.