- **解答例に関して**: 院試の問題について受験生同士で議論できればなぁ, と作りました. 解答例が正答であることは保証しません. 間違えてたり, もっといい方法があれば指摘して欲しいと思います.

$\boxed{\mathrm{a}}-\boxed{4}$ (電気回路) 解答例 2009.07.27 第 2 版

(i) (a) 図 1 のように $\dot{V}_1$, $\dot{V}_2$, $\dot{I}_2$ を置く. 電源電圧 $\dot{V}$, 電流 $\dot{I}$ は設問の定義どおりである.

電圧および電流について方程式を立てると,

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \left(\frac{1}{\mathrm{j}\omega C} + R\right)\dot{I}, \tag{1}$$

$$\dot{V}_2 = Z_0 \dot{I}_2, \tag{2}$$

$$\dot{V}_1 = \mathrm{j}\omega L_1 \dot{I} - \mathrm{j}\omega M \dot{I}_2, \tag{3}$$

$$\dot{V}_2 = \mathrm{j}\omega M \dot{I} - \mathrm{j}\omega L_2 \dot{I}_2 \tag{4}$$

の 4 つの方程式が得られる. ここで, 式 2 は分布定数線路の終端でインピーダンスの整合が取れているため簡単になっている. もしインピーダンスの整合が取れていないなら, もっと複雑な式になってしまう.

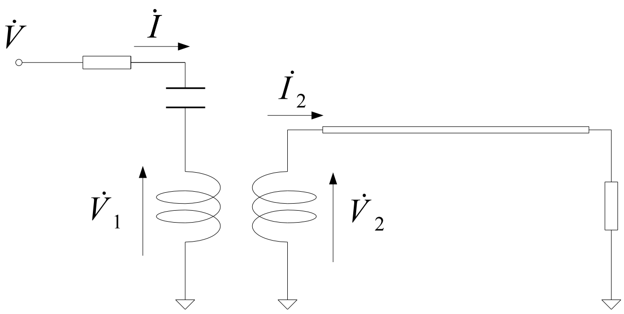

図 1: 回路図

式 1 - 4 を連立させて, $\dot{I}$ について解く. まず式 2 と 4 より

$$\dot{I}_2 = \frac{\mathrm{j}\omega M}{Z_0 + \mathrm{j}\omega L_2}\dot{I}. \tag{5}$$

式 3 に代入して

$$\dot{V}_1 = \left\{\mathrm{j}\omega L_1 + \frac{(\omega M)^2}{Z_0 + \mathrm{j}\omega L_2}\right\}\dot{I}. \tag{6}$$

これを式 1 に代入して整理すると

$$\dot{I} = \left\{\mathrm{j}\omega L_1 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} + R + \frac{(\omega M)^2}{Z_0 + \mathrm{j}\omega L_2}\right\}^{-1}\dot{V} \tag{7}$$

となり, $\dot{I}$ が求まった.

(b) 理想変圧器の場合は, 式 3, 4 の代わりに

$$\dot{V}_2 = n\dot{V}_1 = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\,\dot{V}_1, \tag{8}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{1}{n}\dot{I} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}\,\dot{I} \tag{9}$$

を用いればよい.

(i)(a) と同じように方程式を連立させて $\dot{I}$ について解くと,

$$\dot{I} = \left(\frac{L_1}{L_2} Z_0 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} + R\right)^{-1} \dot{V}. \tag{10}$$

(ii) 図 2 のように v_1, v_2, i_1, i_2 を置く. 電源電圧 E, 負荷電圧 $v(t)$ は設問の定義どおりである.
$t > 0$ における電圧および電流について方程式を立てると,

$$E = Ri_1 + v_C + v_1, \tag{11}$$

$$i_1 = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_C, \tag{12}$$

$$v_2 = nv_1, \tag{13}$$

$$i_2 = \frac{1}{n}i_1 \tag{14}$$

の 4 つの方程式が得られる. また, 初期値として $v_C(0) = V_0$ が与えられている.

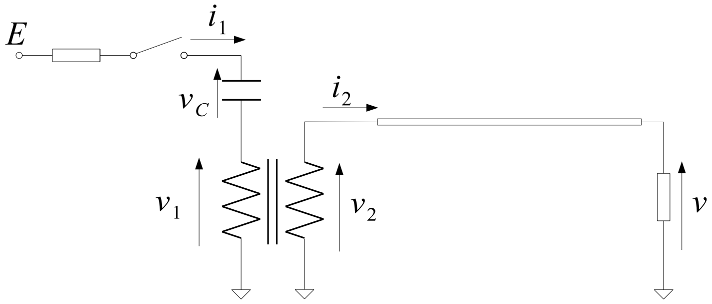

図 2: 回路図

まず方程式を連立させて v_C について解くと,

$$E = \left\{1 + C\left(R + \frac{Z_0}{n^2}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right\} v_C \tag{15}$$

という微分方程式が得られる. この微分方程式を, 初期値 $v_C(0) = V_0$ に注意して解くと,

$$v_C = E - (E - V_0)\exp\left(-\frac{t}{C(R + Z_0/n^2)}\right) \ (t > 0). \tag{16}$$

これより

$$i_1 = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_C = \frac{E - V_0}{R + Z_0/n^2}\exp\left(-\frac{t}{C(R + Z_0/n^2)}\right)H(t) \tag{17}$$

$$\Rightarrow v_2 = Z_0 i_2 = \frac{Z_0}{n}i_1 = \frac{Z_0}{n}\frac{E - V_0}{R + Z_0/n^2}\exp\left(-\frac{t}{C(R + Z_0/n^2)}\right)H(t) \tag{18}$$

が得られる. ただし, $H(t)$ は Heaviside 関数で,

$$H(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t > 0). \end{cases}$$

分布定数線路の左端の電圧 v_2 が, 線路の右端に伝わるのに時間 l/g かかるので, 右端の電圧 v は

$$v = \frac{Z_0}{n}\frac{E - V_0}{R + Z_0/n^2}\exp\left(-\frac{t - l/g}{C(R + Z_0/n^2)}\right)H(t - l/g) \tag{19}$$

である.

修正箇所

- July 16, 2009 : 初版
- July 27, 2009 :
  問題 (ii) で, 微分方程式の解がおかしかったので修正. 指摘ありがとうございます.