線形空間に対する直和・直積・テンソル積に関するまとめ

Y. NOBUOKA

平成 22 年 4 月 17 日

線形空間に対する直和・直積・テンソル積について自分なりに理解できたと思うので簡単にまとめておきます. 理論はからっきしの人間なので間違いがある可能性があります. 間違いがあったら教えていただけると幸いです.

なお, 本文書の中ではブラケット記法のケット[1] を用いており, なじみのない方もおられるかと思いますが, ベクトルを表していると考えてください.

1 線形空間に対する直和

まずは線形空間に対する直和から.

集合の場合 まず集合論的な定義を説明すると, 互いに交わらない[2] 2 つの集合 S_1 と S_2 に対して, 直和 S は和集合として定義できる. 定式化すると以下のとおりである.

$$S = \{s \mid s \in S_1 \, \mathrm{or} \, s \in S_2\}. \tag{1}$$

簡単な例を示すと, 集合 $\{1, 3\}$ と $\{2, 4\}$ の直和は $\{1, 2, 3, 4\}$ である.

線形空間の場合 線形空間の直和も同じように和集合として考えることができる. 互いに交わらない 2 つの線形空間 S_1, S_2 があるときその直和空間 $S = S_1 \oplus S_2$ が定義でき,

$$S = \{|s_1\rangle + |s_2\rangle \mid |s_1\rangle \in S_1, |s_2\rangle \in S_2\} \tag{2}$$

である[3] .

直和空間の次元は, もともとの 2 つの空間の次元の和である.

$$\dim S = \dim S_1 + \dim S_2. \tag{3}$$

線形空間の直和の例 簡単な例を示す.

異なる軸上の 2 つの実数空間 S_X, S_Y を考える. それぞれ次元は 1 であり, それぞれの基底を $\{|x\rangle\}$, $\{|y\rangle\}$ とする. 実数平面上の x 軸上に張られた 1 次元線形空間が S_X, y 軸上に張られた 1 次元線形空間が S_Y と考えてもらえるとわかりやすいと思われる.

ここで S_X と S_Y の直和を考える. S_X と S_Y の直和空間を S_{sum} とすると

$$S_{\mathrm{sum}} = S_X \oplus S_Y \tag{4}$$

である. S_{sum} は $\{|x\rangle, |y\rangle\}$ を基底とする 2 次元線形空間である. つまり, S_{sum} は $X-Y$ 平面に張られた 2 次元線形空間である. S_X の任意の元 $s_1|x\rangle$ と S_Y の任意の元 $s_2|y\rangle$ の和 $s_1|x\rangle + s_2|y\rangle$ が S_{sum} の元であるため, S_{sum} の元が 2 次元平面状の任意の位置を指し示すことができるということは容易に理解できるであろう.

[1] $|...\rangle$ という記法です. 量子力学の分野でよく使用されます.
[2] この表現が正しいのかは不明. 要は 2 つの線形空間 V_1, V_2 があったとして $V_1 \cap V_2 = \surd$ となることを言っています.
[3] 集合の場合と定義が違うように見えるかもしれないが, 集合の場合は 2 つの集合が同じ線形空間に属しているため基底が同じである一方, 線形空間の場合は基底が異なっているため表現が異なっているだけで, 和集合をとっているという点では同じである.

2 線形空間に対する直積

次に線形空間に対する直積について.

集合の場合 まず集合論的な定義を説明を行う. 2 つの集合 S_1 と S_2 に対して, 直和 S は以下の式で定義される.

$$S = \{(s_1, s_2) \mid s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\}. \tag{5}$$

直和の場合と違い, 2 つの集合 S_1 と S_2 が互いに交わっていてもよい.

簡単な例を示すと, 集合 $\{1,3\}$ と $\{2,4\}$ の直積は $\{(1,2),(1,4),(3,2),(3,4)\}$ である.

線形空間の場合 線形空間の直積はほとんど直和と同じである. 直和のときと同じく 2 つの線形空間 S_1, S_2 の直積 $S = S_1 \times S_2$ を考えると, 定義としては

$$S = \{(|s_1\rangle, |s_2\rangle) \mid |s_1\rangle \in S_1, |s_2\rangle \in S_2\} \tag{6}$$

となる. このとき得られるのは要素列 (タプル; tuple) の集合であるが, その集合は線形性を持っており, 線形空間である. 各線形空間の元の組み合わせが直積空間の元であるため, 直和空間と同じであると考えることができる.

無限次元の場合は直和と直積は違うものになるようだがまだよくわかっていない. もう 1 点直和と異なるところは, 集合の場合のところでも述べたように 2 つの線形空間が交わっていてもよいところである.

3 線形空間に対するテンソル積

最後にテンソル積について.

関数の場合 2 変数関数 h が, 1 変数関数 f と g を使って以下のように定義されているとする.

$$h(x,y) = f(x)g(y). \tag{7}$$

このとき関数 h を関数 f と g のテンソル積で書くことができ,

$$h = f \otimes g \tag{8}$$

である. h を用いずに式 (7) を書くと, $(f \otimes g)(x,y) = f(x)g(y)$ となる.

線形空間の場合 量子力学において波動関数とケットはほとんど同じものであり, 関数で定義できたようにケット (ベクトル) のテンソル積も定義できる.

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle^{(1)} \otimes |\psi_2\rangle^{(2)} \tag{9}$$

ここで, $|\psi_1\rangle^{(1)} \in \mathcal{H}^{(1)}$, $|\psi_2\rangle^{(2)} \in \mathcal{H}^{(2)}$ とする[4] と, $|\psi\rangle$ が属するのは Hilbert 空間 $\mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$ である. $\mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$ は $\mathcal{H}^{(1)}$ と $\mathcal{H}^{(2)}$ のテンソル積空間であり, $\dim\left(\mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}\right) = \dim\left(\mathcal{H}^{(1)}\right)\dim\left(\mathcal{H}^{(2)}\right)$ である.

$\mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$ は, 基底が

$$\left\{|e_i\rangle^{(1)} \otimes |e_j\rangle^{(2)} \mid i = 1, ..., \dim \mathcal{H}^{(1)}, j = 1, ..., \dim \mathcal{H}^{(2)}\right\} \tag{10}$$

で表されるような空間である. ここで $\left\{|e_i\rangle^{(1)} \mid i = 1, ..., \dim \mathcal{H}^{(1)}\right\}$, $\left\{|e_j\rangle^{(2)} \mid j = 1, ..., \dim \mathcal{H}^{(2)}\right\}$ はそれぞれの系の基底である.

[4] $\mathcal{H}$ は Hilbert 空間. ケットの右上に添え字が付いているのは属している空間を区別するため.

物理的な側面　最後にテンソル積の物理的な側面を書いて本文書を終える.

ケットというのは量子力学において量子系の状態を表すのに使用される. 例えば 1 つの光子の偏光を考えるとき, 2 準位系であると考えられるので光子の状態は水平偏光 $|\mathrm{H}\rangle$ と垂直偏光 $|\mathrm{V}\rangle$ という 2 つの基底[5] で表すことができる.

ケットのテンソル積は, 複数の量子系の複合系を考えるときに使用される. ここでは量子系として電子のスピン (2 準位系) を考え, 基底は $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ と表すことにする. 単体の電子のスピン状態は一般的に $|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$ と表される. (ただし $\langle\psi|\psi\rangle = 1$.) 複数 (ここでは 3 つ) の電子の複合系の状態は以下のように表すことができる.

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= |\psi\rangle^{(2)} \otimes |\psi\rangle^{(1)} \otimes |\psi\rangle^{(0)} &(11)\\ &= \left(c_0^{(2)}|0\rangle^{(2)} + c_1^{(2)}|1\rangle^{(2)}\right) \otimes \left(c_0^{(1)}|0\rangle^{(1)} + c_1^{(1)}|1\rangle^{(1)}\right) \otimes \left(c_0^{(0)}|0\rangle^{(0)} + c_1^{(0)}|1\rangle^{(0)}\right). &(12)\end{aligned}$$

テンソル積は分配則などが成り立つので

$$\begin{aligned} |\psi\rangle = {}& c_0^{(2)}c_0^{(1)}c_0^{(0)}|0\rangle^{(2)} \otimes |0\rangle^{(1)} \otimes |0\rangle^{(0)} + c_0^{(2)}c_0^{(1)}c_1^{(0)}|0\rangle^{(2)} \otimes |0\rangle^{(1)} \otimes |1\rangle^{(0)} \\ &+ c_0^{(2)}c_1^{(1)}c_0^{(0)}|0\rangle^{(2)} \otimes |1\rangle^{(1)} \otimes |0\rangle^{(0)} + c_0^{(2)}c_1^{(1)}c_1^{(0)}|0\rangle^{(2)} \otimes |1\rangle^{(1)} \otimes |1\rangle^{(0)} \\ &+ c_1^{(2)}c_0^{(1)}c_0^{(0)}|1\rangle^{(2)} \otimes |0\rangle^{(1)} \otimes |0\rangle^{(0)} + c_1^{(2)}c_0^{(1)}c_1^{(0)}|1\rangle^{(2)} \otimes |0\rangle^{(1)} \otimes |1\rangle^{(0)} \\ &+ c_1^{(2)}c_1^{(1)}c_0^{(0)}|1\rangle^{(2)} \otimes |1\rangle^{(1)} \otimes |0\rangle^{(0)} + c_1^{(2)}c_1^{(1)}c_1^{(0)}|1\rangle^{(2)} \otimes |1\rangle^{(1)} \otimes |1\rangle^{(0)} \qquad (13)\end{aligned}$$

とも書ける.

テンソル積空間の基底ケットを $|0\rangle^{(2)} \otimes |0\rangle^{(1)} \otimes |0\rangle^{(0)}$ のように書くのは面倒であるため, $|0\rangle^{(2)}|0\rangle^{(1)}|0\rangle^{(0)}$ という風に $\otimes$ の記号を書かない記法や, $|000\rangle$ という風に 1 つのケットにまとめて書いてしまうという記法が一般的に使用される. この記法で式 (13) を書き直すと

$$|\psi\rangle = c_0|000\rangle + c_1|001\rangle + c_2|010\rangle + c_3|011\rangle + ... + c_7|111\rangle \qquad (14)$$

となる. このような系は量子情報理論における量子ビットとして利用可能であり, 上の式は量子ビットの重ねあわせ状態を表している.

[5]より正確に言うと,「水平偏光か垂直偏光かを測定すると, 必ず水平偏光であるという結果になる状態 $|\mathrm{H}\rangle$ と, かならず垂直偏光であるという結果が得られる状態 $|\mathrm{V}\rangle$ という 2 つの基底」である. また, 基底の取り方は 1 通りとは限らない. (今回の場合でも, 例えば右回り円偏光 $|\mathrm{R}\rangle$ と左回り円偏光 $|\mathrm{L}\rangle$ という基底の取り方や他の基底の取り方もある.)