- **この文書について** 電気回路について, 微妙に需要があるみたいなんで作成しました.
- **問題の出典** 京都大学工学部電気電子工学科 平成 20 年度開講 「電気回路」 期末試験より. 多少改変を行いました.

問題

図 1 の回路において, キャパシタ C が電圧 V_0 に充電されている. ただし, 無損失分布定数線路の特性インピーダンスを Z_0, 伝播速度を g, 長さを l とする. $t=0$ にスイッチ S を閉じたとき, 以下の問いに答えよ.

(i) 時刻 $0<t<3l/g$ における電圧 $v(t)$ を求めよ.

(ii) 時刻 $3l/g \le t < 5l/g$ における電圧 $v(t)$ も求めよ.

(iii) 定常状態となったときの電圧 $v(t)$ を求めよ.

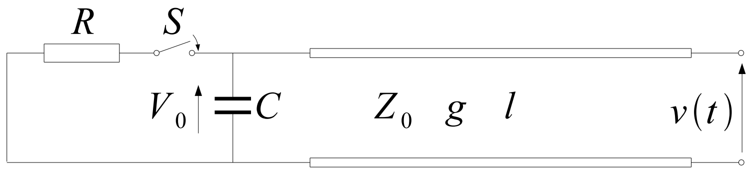

図 1: 問題 1

解答例

(i) 図 1 の回路を, 電源を使って等価的に表すことを考える. スイッチ S には $t<0$ で電圧 V_0 がかかっており, $t>0$ では電圧は 0 である. つまり, スイッチ S の代わりに, 全ての時間領域で電圧 V_0 をかける電圧源と, $t>0$ でそれを打ち消す電圧源を挿入すればよい. 回路図は図 2 になる. ここで, $H(t)$ は Heaviside 関数である.

$$H(t) = \begin{cases} 0 & (t<0) \\ 1 & (t>0). \end{cases}$$

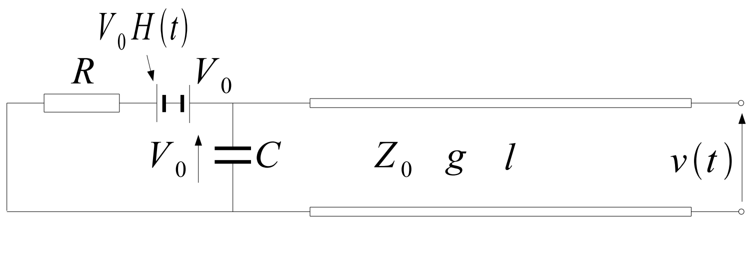

図 2: 等価回路

さらにこの等価回路は, 図 3 の定常状態部分と図 4 の時間依存部分の重ね合わせとして捉えることができる. つまり, $v(t)=v_{(1)}(t)+v_{(2)}(t)$ である. $v_{(1)}(t)$ は定常状態にあり, 時間に依存せず $v_{(1)}(t)=V_0$ である. よって, $v_{(2)}(t)$ さえ解けばよく, すなわち図 4 の過渡現象を解けばよい.

図 4 のように, 各部の電流, 電圧を定義する. この回路には分布定数線路があり回路右端および分布定数線路の左端での電圧, 電流の反射も考慮する必要がある. そこで, 各変数の右肩に括弧付きで何回目の反射に関する電圧 (または電流) かを書くことにする. 例えば v_C だと, 分布定数線路からの反射を含めない値を $v_C^{(0)}$

と書き, 回路右端で反射して分布定数線路の左端に到達した電圧を $v_C^{(1)}$, さらにそこで反射した電圧を $v_C^{(2)}$ と書くことにする. この書き方で v_C を書くと,

$$v_C = v_C^{(0)} + v_C^{(1)} + v_C^{(2)} + ...$$

となる.

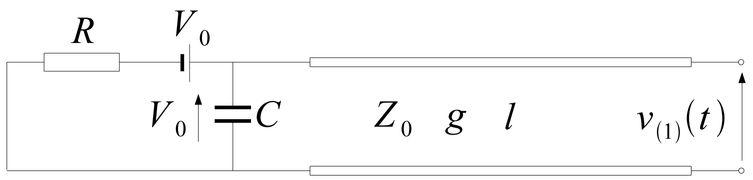

図 3: 等価回路の定上状態部

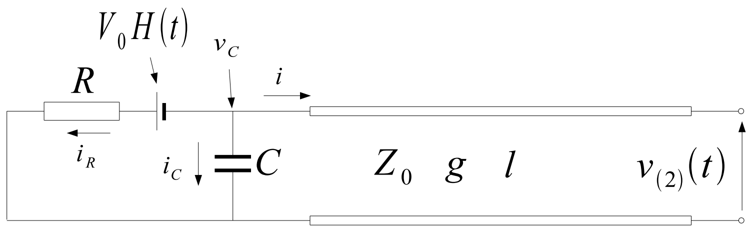

図 4: 等価回路の時間依存部

まずは $v_C^{(0)}$ を考える. 分布定数線路の左側に関して, 集中定数回路の過渡現象を考える. このとき, 分布定数線路はただのインピーダンス Z_0 に見えることに注意する. 電圧, 電流に関して方程式を立てると,

$$i_R^{(0)} = \frac{v_C^{(0)} + V_0}{R}, \tag{1}$$

$$i_C^{(0)} = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_C^{(0)}, \tag{2}$$

$$i^{(0)} = \frac{v_C^{(0)}}{Z_0}, \tag{3}$$

$$i^{(0)} + i_R^{(0)} + i_C^{(0)} = 0. \tag{4}$$

ただし時刻 $t > 0$ について表すとする. ($t < 0$ で $v_C^{(0)}(t) = 0$.) このまま時間領域で方程式を解いてもいいし, s 領域で解いてもよい. $v_C^{(0)}$ について解くと,

$$v_C^{(0)}(t) = \frac{Z_0}{Z_0 + R}V_0\left\{-1 + \exp\left(-\frac{R + Z_0}{CRZ_0}t\right)\right\}H(t). \tag{5}$$

この電圧が分布定数線路を伝わることを考える. 伝播速度は g で線路長は l なので, 線路終端に伝わるまでに l/g の時間がかかる. このことより, $v_{(2)}^{(0)}(t)$ は

$$\begin{aligned} v_{(2)}^{(0)}(t) &= v_C^{(0)}(t - l/g) \\ &= \frac{Z_0}{Z_0 + R}V_0\left\{-1 + \exp\left(-\frac{R + Z_0}{CRZ_0}(t - l/g)\right)\right\}H(t - l/g). \end{aligned} \tag{6}$$

さらに, 線路終端が解放されているので, 反射率 1 で電圧は反射する. $v_{(2)}^{(0)}(t)$ の反射は $v_{(2)}^{(1)}(t)$ と書け,

$$\begin{aligned} v_{(2)}^{(1)}(t) &= 1 \cdot v_{(2)}^{(0)}(t) \\ &= \frac{Z_0}{Z_0 + R}V_0\left\{-1 + \exp\left(-\frac{R + Z_0}{CRZ_0}(t - l/g)\right)\right\}H(t - l/g). \end{aligned} \tag{7}$$

この反射波が分布定数線路左端まで伝播し, そこで反射して戻ってくるのは時刻 $t = 3l/g$ なので, $0 < t < 3l/g$ における $v_{(2)}$ は $v_{(2)}^{(0)}$, $v_{(2)}^{(1)}$ のみで書ける.

$$\begin{aligned} v_{(2)}(t) &= v_{(2)}^{(0)}(t) + v_{(2)}^{(1)}(t) \\ &= \frac{2Z_0}{Z_0 + R} V_0 \left\{ -1 + \exp\left(-\frac{R + Z_0}{CRZ_0}(t - l/g) \right) \right\} H(t - l/g),\ (0 < t < 3l/g). \end{aligned} \tag{8}$$

よって, $0 < t < 3l/g$ における $v(t)$ は,

$$\begin{aligned} v(t) &= v_{(1)}(t) + v_{(2)}(t) \\ &= V_0 \left[1 + \frac{2Z_0}{Z_0 + R} \left\{ -1 + \exp\left(-\frac{R + Z_0}{CRZ_0}(t - l/g) \right) \right\} H(t - l/g) \right],\ (0 < t < 3l/g). \end{aligned} \tag{9}$$

(ii) 式 5 を s 領域で書くと,

$$V_C^{(0)}(s) = -\frac{Z_0}{Z_0 + R} V_0 \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + (Z_0 + R)/CRZ_0} \right). \tag{10}$$

これが線路を伝わることを考えると, 線路終端への伝播には時間 l/g がかかるので遅延要素 $\mathrm{e}^{s \cdot l/g}$ をかけて

$$V_{(2)}^{(0)}(s) = V_C^{(0)}(s) \cdot \mathrm{e}^{s \cdot l/g} \tag{11}$$

$$= -\frac{Z_0}{Z_0 + R} V_0 \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + (Z_0 + R)/CRZ_0} \right) \mathrm{e}^{s \cdot l/g}. \tag{12}$$

また, 反射率 1 で反射するので

$$V_{(2)}^{(1)}(s) = V_{(2)}^{(0)}(s). \tag{13}$$

この反射波が線路の右端に伝播したときの波 $V_C^{(1)}(s)$ は, 上と同様に遅延要素 $\mathrm{e}^{s \cdot l/g}$ をかけて

$$V_C^{(1)}(s) = V_{(2)}^{(1)}(s) \cdot \mathrm{e}^{s \cdot l/g} \tag{14}$$

$$= V_C^{(0)}(s) \cdot \mathrm{e}^{2s \cdot l/g} \tag{15}$$

と書ける.

ここで, 線路の右側から伝播してきた波 ($V_C^{(1)}(s)$) が, 線路左端で反射することを考える. 電圧反射係数は

$$\Gamma_{rv} = \frac{-Z_0 + (R \,||\, 1/sC)}{Z_0 + (R \,||\, 1/sC)}. \tag{16}$$

よって, $V_C^{(1)}(s)$ の反射波 $V_C^{(2)}(s)$ は

$$V_C^{(2)}(s) = \Gamma_{rv} \cdot V_C^{(1)}(s). \tag{17}$$

$V_C^{(2)}(s)$ が線路右端に伝播した波 $V_{(2)}^{(2)}(s)$ は

$$V_{(2)}^{(2)}(s) = V_C^{(2)}(s) \cdot \mathrm{e}^{s \cdot l/g}. \tag{18}$$

また線路終端でも反射して, その反射波 $V_{(2)}^{(3)}(s)$ は

$$V_{(2)}^{(3)}(s) = V_{(2)}^{(2)}(s). \tag{19}$$

時刻 $0 < t < 5l/g$ の範囲であれば, ここまで考えれば十分である. $0 < t < 5l/g$ での $V_{(2)}(s)$ は

$$V_{(2)}(s) = V_{(2)}^{(0)}(s) + V_{(2)}^{(1)}(s) + V_{(2)}^{(2)}(s) + V_{(2)}^{(3)}(s),\ (0 < t < 5l/g). \tag{20}$$

逆変換したらちゃんと時間領域の電圧が出てくるはずで, そしたら $0 < t < 5l/g$ における $v(t) = v_{(1)}(t) + v_{(2)}(t)$ も求まる. はず. やってないから本当に出来るかどうかは不明.

(iii) 定常状態になったとき, 分布定数線路はただの導線であると考える. つまり, この問題の場合, 定常状態になったとき $v(t)$ は C の電圧と等しい. 定常状態になったとき C の電圧は 0 なので, $v(t)$ も 0.

なんとなく重要そうなことをつらつらと書いてみる

- 特性インピーダンス Z_0 の分布定数線路は, 外から見たらただのインピーダンス Z_0 に見える. 分布定数線路の先が解放であろうが短絡であろうが負荷があろうが, それは変わらない. なぜなら分布定数線路とは伝播に時間がかかる線路であり, 電圧が入射した時点でその先がどうなっているのか電圧自身わからないからである.
- 反射が起こるのは分布定数線路から出るとき. 分布定数線路に入るときにも反射を考えてしまいがちだが, それは誤り. 分布定数線路に入るとき, その電位がどうなるのかは電圧の分圧を考えればよい. (上で述べたように分布定数線路を外から見た場合はただのインピーダンスに見えるため.)