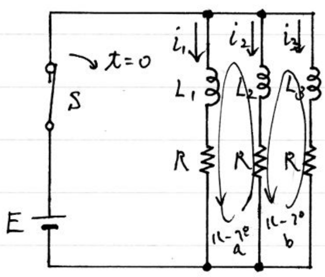
NO.

DATE

集中定数回路の過渡現象 ～第2種初期値を求める～



$L_1 = 2L_2 = 2L_3$

左の回路（定常状態になっている）で，時刻 $t=0$ にスイッチを開いた場合に，電流 i_1 がどうなるかを考える。

まず，$t<0$ では定常状態なので，

$$i_1(t) = i_2(t) = i_3(t) = E/R. \quad (t<0) \quad \cdots (1)$$

$t>0$ を考えるには $t=0$ での電流値が初期値として必要だが，スイッチを開けた瞬間に電流値が変わるので，第2種の初期値を考える必要がある。

第1種初期値を $i_1^{-0}, i_2^{-0}, i_3^{-0}$ とすると，式(1)より

$$i_1^{-0} = i_2^{-0} = i_3^{-0} = E/R. \quad \cdots (2)$$

第2種初期値を $i_1^{+0}, i_2^{+0}, i_3^{+0}$ とする。

ループaの電磁束不変則を考えると，

$$L_1 i_1^{+0} - L_2 i_2^{+0} = L_1 i_1^{-0} - L_2 i_2^{-0}. \quad \cdots (3)$$

ループbでは，$L_2 i_2^{+0} - L_3 i_3^{+0} = L_2 i_2^{-0} - L_3 i_3^{-0}. \quad \cdots (4)$

また，キルヒホフの電流則より，

$$i_1^{+0} + i_2^{+0} + i_3^{+0} = 0. \quad \cdots (5)$$

式(2),(3)より

$$i_1^{+0} = \left(1 - \frac{L_2}{L_1}\right)\frac{E}{R} + \frac{L_2}{L_1} i_2^{+0}. \quad \cdots (6)$$

式(2),(4),(5)より

$$L_2 i_2^{+0} + L_3 (i_1^{+0} + i_2^{+0}) = (L_2 - L_3) E/R.$$

$$\Rightarrow \left(\frac{L_2}{L_3} + 1\right) i_2^{+0} + i_1^{+0} = \left(\frac{L_2}{L_3} - 1\right)\frac{E}{R} \quad \cdots (7)$$

式(7)に(6)を代入して，

$$\left(1 + \frac{L_2}{L_1} + \frac{L_2}{L_3}\right) i_2^{+0} = \left(\frac{L_2}{L_3} + \frac{L_2}{L_1} - 2\right)\frac{E}{R}.$$

$$\therefore i_2^{+0} = \frac{L_2(L_3 + L_1) - 2L_3L_1}{L_1L_2 + L_2L_3 + L_3L_1}\frac{E}{R}.$$

同様に
（対称性より）

$$i_1^{+0} = \frac{L_1(L_2 + L_3) - 2L_2L_3}{L_1L_2 + L_2L_3 + L_3L_1}\frac{E}{R},$$

$$i_3^{+0} = \frac{L_3(L_1 + L_2) - 2L_1L_2}{L_1L_2 + L_2L_3 + L_3L_1}\frac{E}{R}.$$

最後に微分方程式を立て，i_1 を求める。 $t>0$ で，

$$\begin{cases} \left(L_1\dfrac{d}{dt}+R\right)i_1 = \left(L_2\dfrac{d}{dt}+R\right)i_2 = \left(L_3\dfrac{d}{dt}+R\right)i_3, & (\because \text{K.V.L.}) \\ i_1+i_2+i_3=0. & (\because \text{K.C.L}) \end{cases}$$

ラプラス変換して，

$$\begin{cases} (sL_1+R)I_1 - L_1 i_1^{+0} = (sL_2+R)I_2 - L_2 i_2^{+0} = (sL_3+R)I_3 - L_3 i_3^{+0}, & \cdots(8) \\ I_1+I_2+I_3=0. & \cdots(9) \end{cases}$$

$L_1=2L_2=2L_3$ という条件より $L_2=L_3=L$，$L_1=2L$ とすると，

$$i_1^{+0}=\frac{2E}{5R},\quad i_2^{+0}=i_3^{+0}=-\frac{E}{5R}.$$

また，式(8)より

$$(sL+R)I_2 - Li_2^{+0} = (sL+R)I_3 - Li_3^{+0}.$$

$$\therefore I_2=I_3. \qquad よって\ I_1=-2I_2. \cdots(10) \qquad (\because 式(9)).$$

$$(2sL+R)I_1 - 2Li_1^{+0} = (sL+R)I_2 - Li_2^{+0}$$

$$\Rightarrow \frac{5sL+3R}{2}I_1 = L(2i_1^{+0}-i_2^{+0}).$$

$$\therefore I_1 = \frac{2}{5sL+3R}\cdot L\left(2\cdot\frac{2E}{5R}-\left(-\frac{E}{5R}\right)\right) = \frac{2}{5sL+3R}\cdot\frac{LE}{R}.$$

$$= \frac{1}{s+3R/5L}\cdot\frac{2E}{5R}.$$

逆変換して

$$i_1(t)=\frac{2E}{5R}e^{-\frac{3R}{5L}t} \qquad (t>0).$$