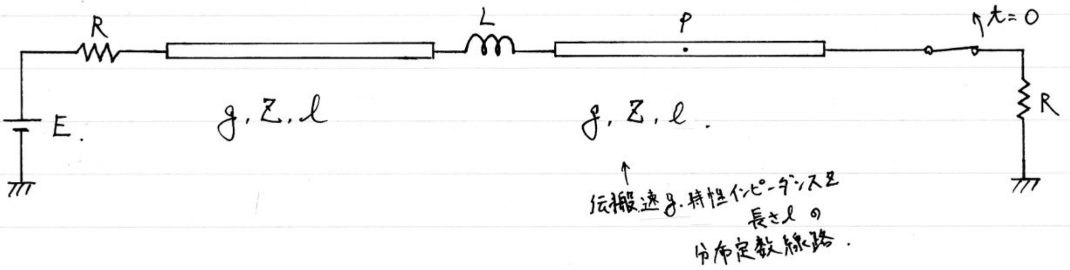
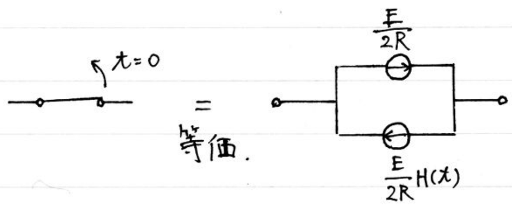
分布定数線路・過渡現象
～初期電流分布がある場合～

NO. 1
DATE '08.07.19



図の回路（定常状態になっている）で、時刻 $t=0$ にスイッチを開けた場合、
点Pの電位がどのように変化するかを考える。

$t<0$ で回路は定常状態であり、スイッチには $E/2R$ の電流が流れている。
$t=0$ でスイッチを切るということは、$t>0$ でスイッチには電流が流れない。
つまり、スイッチは等価的に2つの電流源で表せる。

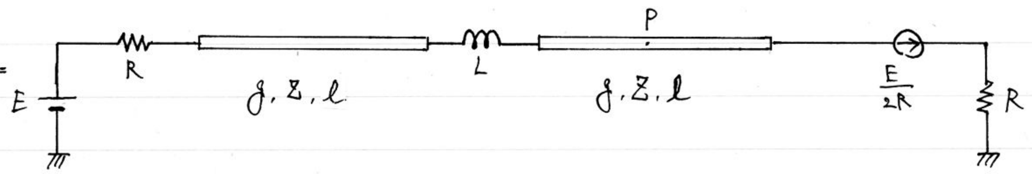


$H(t)$ は Heaviside 関数

$$H(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

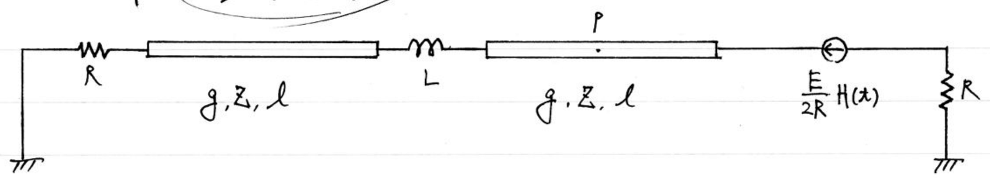
よって、問題の回路は、2つの回路の重ね合わせで表現できる。

No.1



＋ 重ね合わせ.

No.2



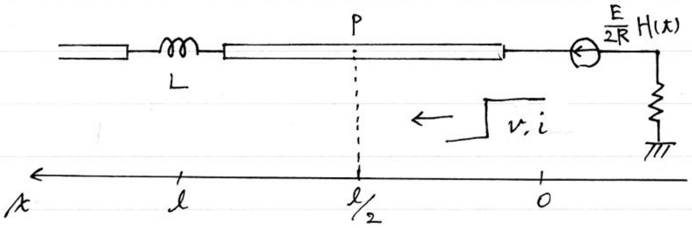
No.1 の回路は定常状態なので、点Pの電位 $v_P^{(1)}$ は

$$v_P^{(1)}=\frac{E}{2}.$$

KOKUYO

No. 2 の回路は過渡現象を考える必要がある。

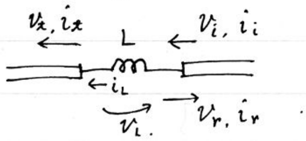
左向きを正に x 軸をとり、電流源の位置を $x=0$ とする。



電流源は $t>0$ で電流 $E/2R$ を流すので、$t=0$ に $x=0$ でステップ電圧、電流が発生し、時刻 $t=l/2g$ に点 P に到達する。発生したステップ電流は当然 $E/2R$ なので、電圧は $ZE/2R$。よって、このステップ電圧による点 P の電位は、

$$v_p^{(2,1)}(t) = \frac{ZE}{2R} H\left(t-\frac{l}{2g}\right).$$

さらに時間がたつと、$t=\frac{l}{g}$ で $x=l$ に到達する。ここで反射を考える必要がある。



入射波を v_i, i_i とすると、当然

$$v_i(t) = \frac{ZE}{2R} H\left(t-\frac{l}{g}\right)$$

であるが、$t-l/g$ が基準となるように時間軸 t' を作り、

$$t \to t', \quad v_i(t) \to v_i(t')$$

とする。

$$t' = t - l/g,$$

$$v_i(t') = \frac{ZE}{2R} H(t').$$

境界条件を考えると、

$$\begin{cases} v_i = Z i_i, & \\ v_r = Z i_r, & i_i - i_r = i_t, \\ v_t = Z i_t, & \\ L\dfrac{d}{dt} i_L = v_L, & i_L = i_t, \quad v_L = -v_t + (v_i + v_r). \end{cases}$$

である。

これらをラプラス変換すると、

$$\begin{cases} V_i = Z I_i \\ V_r = Z I_r \\ V_t = Z I_t \\ sLI_L = V_L + \underbrace{L i_L^{+0}}_{} \end{cases} \qquad I_i - I_r = I_t \qquad I_L = I_t, \quad V_L = V_i + V_r - V_t.$$

初期値の項：今は $i_L^{+0} = 0$.

これを解くと、

$$V_r = \frac{sL}{sL + 2Z} V_i$$

$v_i(t') = \frac{ZE}{2R} H(t')$ なので、s領域では

$$V_i = \frac{1}{s}\frac{ZE}{2R}.$$

$$\therefore\ V_r = \frac{L}{sL + 2Z}\frac{ZE}{2R} = \frac{1}{s + \frac{2Z}{L}}\frac{ZE}{2R}$$

$$\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$v_r(t') = \frac{ZE}{2R} e^{-\frac{2Z}{L}t'} H(t').$$

t'をtに戻して、

$$v_r(t) = \frac{ZE}{2R} e^{-\frac{2Z}{L}(t - \frac{l}{g})} H\left(t - \frac{l}{g}\right).$$

この反射波は時間 $l/2g$ 後にP点に到達する。よって、この反射波によるP点の電圧 $v_p^{(2,2)}$ は、

$$v_p^{(2,2)}(t) = \frac{ZE}{2R} e^{-\frac{2Z}{L}(t - \frac{3l}{2g})} H\left(t - \frac{3l}{2g}\right).$$

さらにこの波は $t = 2l/g$ に $x = 0$ に到達し、反射率1（∵電流源はインピーダンス無限大）で反射する。ここまでをグラフに描くと以下のようになる。